Решения и критерии
8 класс

8.1. Сумма трёх различных наименьших натуральных делителей некоторого числа A равна 8. На сколько нулей оканчивается число A?

Ответ: на один ноль.

Решение. Поскольку 1 наименьший делитель, то для суммы трех различных натуральных чисел имеется два варианта получить 8 = 1 + 2 + 5 = 1 + 3 + 4. Но второй вариант не подходит, так как если число делится на 4, то оно делится и на 2, а, следовательно, наименьшими делителями будут 1, 2 и 3, сумма которых не равна 8. Поэтому остается единственный вариант 1, 2 и 5. Остается заметить, что в этом случае число А делится на 2, но не делится на 4. Иначе наименьшими делителями были бы числа 1, 2 и 4 с суммой 7, что не подходит по условию. Следовательно, числоА оканчивается единственным нулем.

Критерии. Получен верный обоснованный ответ – 7 баллов; не обосновано, почему в случае 1, 2, 5 не может быть больше одного нуля – минус 2 балла; не рассмотрен вариант 1, 3, 4 – минус 3 балла;ответ без обоснования – 1 балл.

8.2. Даны положительные числа a, b,c,d,e. Известно, что$a \cdot b = 21,\ b \cdot c = 12,\ c \cdot d = 18,\ d \cdot e = 56,\ e \cdot a = 49$. Чему равно a?

Ответ: $a = 21/4$.

Решение. Перемножив первое, третье и пятое равенства и разделив на произведение второго и четвертого, получим $\frac{a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot a}{b \cdot c \cdot d \cdot e} = a^2 = \frac{21 \cdot 18 \cdot 49}{12 \cdot 56} = \frac{3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 7}{3 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{9 \cdot 49}{16}$. Откуда $a = \frac{21}{4}$. Понятно, что для нахождения всех чисел достаточно найти хотя бы одно из них.

Критерии. Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов; приведены верные значения всех пяти чисел с проверкой условий – 6 баллов; при верном решении системы допущена арифметическая ошибка, в результате которой получен неверный ответ – 4 балла; верный ответ без обоснования – 1 балл.

8.3. Пройдя половину пути, поезд уменьшил скорость на 25% и поэтому опоздал к месту назначения на 0,5 часа. Определите, за какое время поезд прошёл весь путь?

Ответ: за 3,5 часа

Решение. Примем длину половины всего пути за S км. Пусть vкм/ч – скорость поезда при прохождении им первой половины пути. Тогда 0,75vкм/ч – скорость поезда при прохождении им второй половины пути. Следовательно, S/vчасов поезд затратил на прохождение первой половины пути, и $S/0{,}75v$ часов – на прохождение второй половины после снижения скорости. Поскольку, на прохождение всего пути с постоянной скоростью v поезд затратил бы $2S/v$ часов, то, согласно условию задачи, имеем уравнение $\frac{S}{v}+\frac{S}{0{,}75v}=\frac{2S}{v}+\frac{1}{2}$. Решая уравнение относительно отношения S/v, получим $S/v = 3/2$. Следовательно, на весь путь поезд затратит $\frac{2S}{v}+\frac{1}{2}$ = 3,5 часа.

Критерии. Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов; верно составлено уравнение, но при решении допущены арифметические ошибки, или решение отсутствует – 4 балла, имеются верные рассуждения, но уравнение составлено не верно – 1 балл.

8.4. В равнобедренном треугольнике *ABC* с основанием *AC* проведена биссектриса *CD*. Прямая, проходящая через точку *D* перпендикулярно *DC*, пересекает *AC* в точке *E*. Докажите, что *EC* = 2*AD*.

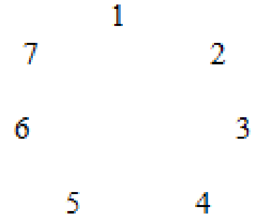
Решение. Пусть *F* – точка пересечения прямых*DE* и *BC*; *K* – середина отрезка *EC*. Отрезок *CD*является биссектрисой и высотой треугольника *ECF*, поэтому *ED* = *DF*, а значит, *DK* || *FC*и *AD* = *DK*. Далее, медиана *DK* прямоугольного треугольника *EDC* в два раза меньше его гипотенузы *EC*, поэтому *AD* = *DK* = *EC*/2. Заключительную часть можно завершить и так: отрезок *DK* является средней линией треугольника *ECF*, откуда *AD* = *DK* = *FC*/2 = *EC*/2,

Критерии. Приведено обоснованное доказательство – 7 баллов; построена точка *F* и доказано, что треугольник *ECF* равнобедренный – 4 балла; проведена через точку *D* хотя бы одна из средних линий треугольника *ECF* – плюс 2 балла.

8.5. По кругу лежат семь монет, среди которых три фальшивые, которые весят одинаково и легче настоящих. Известно, что фальшивые монеты лежат подряд. Можно ли двумя взвешиваниями на чашечных весах без гирь определить все фальшивые монеты?

Ответ: да, можно.

Решение. Занумеруем монеты по кругу.



Положим на разные чаши весов монеты 3 и 6. Если весы окажутся в равновесии, то это две настоящие монеты, посколькуони одинаковы, а предположение об их фальшивости приводит к тому, что фальшивых не менее четырёх.Кроме того, фальшивыми могут быть только монеты с номерами 7, 1, 2. Рассмотрим случай, когда на первом взвешивании нет равновесия. Пусть для определённости монета 6 легче монеты 3. Ясно, что 6 – фальшивая, 3 – настоящая. Положим на одну чашу весов монеты 3 и 6, на другую монеты 4 и 5. Если монеты 6 и 3 окажутся тяжелее монет 4 и 5, то фальшивые монеты это 4, 5, 6, если равенство, то это 5, 6, 7 и если 6 и 3 легче 4 и 5, то фальшивые монеты это 6, 7, 1.

Критерии. Получен обоснованный ответ – 7 баллов; верно выполнено первое взвешивание, а при втором имеются неточности в определении фальшивых монет – 4-5 баллов; верно выполнено первое взвешивание и рассмотрены его результаты – 2 балла; выполнено какое-то взвешивание и имеются верные рассуждения о его результатах – 1 балл.

.