Решения и критерии
7 класс.

7.1. Чему равен знаменатель правильной несократимой дроби, равной числу 0,000625?

Ответ: 1600.

Решение.$0{,}000625=\frac{625}{1000000}=\frac{5\cdot5\cdot5\cdot5}{10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10}=\frac{1}{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot10\cdot10}=\frac{1}{16\cdot100}=\frac{1}{1600}$.

Критерий. Получен верный ответ с объяснениями или вычислениями, приводящими к ответу – 7 баллов;приведен верный ответ без пояснений – 5 баллов.

7.2. Четверо приятелей заметили, что если они сложатся без первого, то соберут 2016рублей, без второго – 2017, без третьего – 2018, без четвертого – 2019 рублей. Сколькоу кого денег?

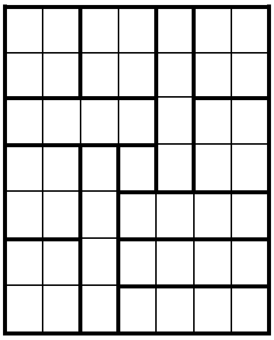
Ответ: у первого 674 рубля, у второго 673 руб., у третьего 672 руб., четвертого 671 руб.

Решение. Всего денег у приятелей (2016 + 2017 + 2018 + 2019) : 3 = 2690 рублей. Поэтомуу первого 2690 – 2016 = 674, у второго 2690 – 2017 = 673, у третьего 2690 – 2018 = 672, ачетвертого 2690 – 2017 = 671 рублей.

Критерии. Получен обоснованный ответ – 7 баллов; ответ без обоснования, но с проверкой выполнения условия задачи – 5 баллов; приведен только ответ – 3 балла.

7.3. Из клетчатого квадрата 7х7 по границам клеток вырезали равное количество квадратов 2х2 и прямоугольников 1х4. Какое наибольшее количество этих фигурок могло быть вырезано?

Решение. Как квадрат, так и прямоугольник состоят из 4 клеток. Поэтому количество вырезанных фигур не больше чем 49 :4, т.е. не больше 12. Фигур обоих типов поровну, поэтому квадратов 2×2и прямоугольников 1×4не более чем по 6. На рисунке показано, как можно вырезать из большого квадрата по 6 квадратов2×2и прямоугольников 1×4.



Критерии. Приведен правильный вариант разрезания – 7 баллов; приведена оценка без примера – 1 балл.

7.4. Неточные весы показывают вес, который может отличаться от настоящего, но не больше чем на 0,5 кг (при разных взвешиваниях отклонения показаний весов от истинного веса могут быть разными). Когда на них положили свои портфели Петя и Вася, весы показали 5,5 кг, портфели Пети и Коли вместе потянули на 7 кг, а портфели Коли и Васи – на 6 кг. Когда же на весы положили все три портфеля, они показали 8 кг. Сколько весит каждый из портфелей на самом деле?

Ответ: Колин – 3,5 кг, Петин – 3 кг, Васин – 2 кг.

Решение. Если бы весы показывали точный вес, то сумма результатов первых трех взвешиваний давала бы удвоенный суммарный вес трех портфелей. Однако весы неточные, и суммарная погрешность за три взвешивания не более 1,5 кг. Поэтому три портфеля вместе весят не меньше чем (5,5+7+6−1,5) : 2 = 8,5 кг. С другой стороны, четвертое взвешивание показывает, что три портфеля вместе весят не больше чем 8 + 0,5 = 8,5 кг. Поэтому вместе портфели весят ровно 8,5 кг. Это возможно, только если во всех трех первых взвешиваниях вес был завышен максимально, т.е. на 0,5 кг, иначе три портфеля вместе весили бы больше 8,5 кг. Поэтому истинный суммарный вес портфелей Пети и Васи равен 5 кг, Пети и Коли – 6,5 кг, Коли и Васи – 5,5 кг, откуда легко находится ответ.

Критерии. Получен верный обоснованный ответ – 7 баллов; верно определен суммарный вес трех портфелей, а веса портфелей определены не точно или не определены – 5 баллов; приведен верный ответ с проверкой условий – 3 балла; только верный ответ – 1 балл.

7.5. На клетчатой бумаге нарисовали большой квадрат. Его разрезали на несколько одинаковых средних квадратов. Один из средних квадратов разрезали на несколько одинаковых маленьких квадратов. Стороны всех квадратов проходят по линиям сетки. Найдите длины сторон большого, среднего и маленького квадратов, если сумма их площадей равна 154.

Ответ: 12, 3 и 1 соответственно.

Решение. Из условия задачи следует, что длина стороны каждого квадрата – натуральное число, причем длина стороны каждого квадрата является делителем длины стороны предыдущего. Пусть длина стороны маленького квадрата равна a, среднего – ka, большого – mka. Тогда $(mka)^2 + (ka)^2 + a^2 = 154$ или $a^2(m^2k^2 + k^2 + 1) = 154$. Из полученного равенства следует, что 154 кратно a^2. Так как $154 = 2 \cdot 7 \cdot 11$, то оно кратно только 1^2, то есть $a = 1$. Тогда $k^2(m^2 + 1) = 153$. Следовательно, 153 делится на k^2. Учитывая, что $153 = 3^2 \cdot 17$ и $k > 1$, получим: $k = 3$. Подставляя найденное значение k в предыдущее равенство, получим, что $m = 4$. Таким образом, длины сторон квадратов равны: маленького – 1, среднего – 3, большого – 12.

Можно также составить уравнение $a^2 + b^2 + c^2 = 154$, *где* a, b *и* c *– искомые длины, найти все его натуральные решения и отобрать из них то, которое удовлетворяет условию. В этом случае, перебор должен быть полным и обоснованным, в частности, должна быть найдена и отброшена тройка (9; 8; 3).*

Критерии. Приведено полное обоснованное решение и получен верный ответ – 7 баллов;

приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности и получен верный ответ – 5-6 баллов; получено первое равенство, но дальнейшие выводы не верны или отсутствуют – 1 балл; приведен верный ответ и проверено, что он удовлетворяет условию, либо верный ответ получен неполным перебором – 1 балл.