Решения и критерии
10 класс

10.1. Доказать, что в последовательности 2018, 20182018, 201820182018, ... нет такого числа, которое является квадратом целого числа.

Решение.Если четное число является квадратом целого числа, то оно делится на 4. Но ни одно число в приведенной последовательности, согласно признаку делимости, на 4 не делится. (Известно, что при делении на 4 квадрат натурального числа дает остаток 0 или 1. Действительно, если n - четное, то$n = 2k$ и $n^2 = 4k^2$ делится на 4, то есть дает остаток 0. При нечетном $n = 2k + 1$, его квадрат$n^2 = 4k^2 + 4k + 1$ дает остаток 1 при делении на 4.Все числа последовательностипри делении на 4 дают остаток 2).

Критерии. Обоснованное доказательство – 7 баллов; отмечено, что ни одно число не делится на 4 – 3 балла.

10.2. В зоопарке есть 10 слонов и огромные чашечные весы. Известно, что если любые четыре слона встанут на левую чашу и любые три на правую, левая чаша перевесит. Три слона встали на левую чашу и два – на правую. Обязательно ли левая чаша перевесит?

Ответ: обязательно.

Решение. Первый способ. Пусть три слона встали на левую чашу весов, а два – на правую, и при этом левая чаша не перевесила правую. Попросим тогда самого лёгкого из пяти слонов, не стоящих на весах, встать на левую чашу, а самого тяжёлого – на правую. В этом случае левая чаша по-прежнему не сможет перевешивать правую, что противоречит условию. Следовательно, левая чаша обязательно перевесит.

Второй способ. Запишем массы слонов в порядке возрастания: $m_1 \leq m_2 \leq \ldots \leq m_{10}$. По условию: $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 > m_8 + m_9 + m_{10}$. Так как $m_4 \leq m_8$, то $m_1 + m_2 + m_3 > m_9 + m_{10}$. Таким образом, три самых лёгких слона тяжелее двух самых тяжёлых, следовательно, любые три слона тяжелее любых двух из оставшихся.

Критерии. Приведено полное обоснованное решение (любым способом) – 7 баллов; приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – 4-6 баллов; рассмотрены только частные случаи или конкретные примеры – 0 баллов.

10.3. Квадратичная функция $f(x)$ такова, что каждое из уравнений $f(x) = x - 1$ и $f(x) = 2 - 2x$имеет ровно по одному решению. Докажите, что уравнение $f(x) = 0$не имеет решений.

Решение. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. Тогда данные в условии задачи уравнения можно переписать в виде $ax^2 + (b-1)x + c + 1 = 0$ и $ax^2 + (b+2)x + c - 2 = 0$. Поскольку оба уравнения имеют по одному решению, их дискриминанты равны нулю. Таким образом, $(b-1)^2 - 4a(c+1) = 0$и $(b+2)^2 - 4a(c-2) = 0$. Умножив первое уравнение на 2, сложив со вторым и поделив результат на 3, получим $b^2 4ac \,\square\, 2$. Значит,уравнение $f(x) = 0$не имеет решений.

Критерии. Полное доказательство – 7 баллов; выписаны условия равенства нулю дискриминантов уравнений без дальнейших продвижений – 1 балл.

10.4. В школьном турнире по шашкам каждый участник встретился с каждым один раз, за победу присуждалось 2 очка, за ничью – 1 очко, за поражение – 0. Девочек участвовало в 9 раз меньше, чем мальчиков, а очков мальчики вместе набрали в 4 раза больше, чем девочки вместе. Сколько очков набрали девочки?

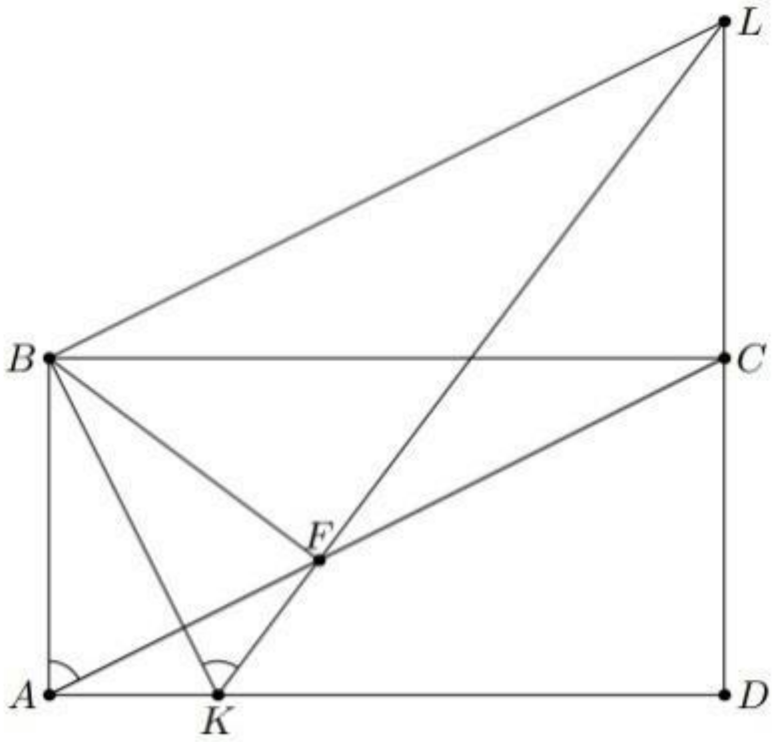
Ответ: 18 очков.

Решение. Пусть в турнире участвовало x девочек. Тогда всего в турнире было $10x$участников и они суммарно набрали $10x(10x-1)$ очков. По условию отношение числа очков, набранных девочками, к числу очков, набранных мальчиками, равно 1:4. Поэтому девочки набрали пятую часть всех очков, то есть $2x(10x-1)$ очков, а значит, каждая из девочек выиграла все $10x-1$ партий, которые она сыграла. Если бы среди участников турнира было бы две девочки, то партию между собой они должны были обе выиграть, что невозможно. Поэтому в турнире участвовала одна девочка и она набрала 18 очков.

Критерии. Записано выражение для общего количества очков – 1 балл, записано выражение для количества очков, набранных девочками – 2 балла, сделан вывод о числе выигрышей девочек – 2 балла, сделан вывод о числе девочек и получен ответ – 2 балла. Баллы суммируются.

10.5. Через вершину B прямоугольника $ABCD$ провели две взаимно перпендикулярные прямые. Одна прямая пересекает сторону AD в точке K, другая прямая пересекает продолжение стороны CD в точке L. Прямые KL и AC пересекаются в точке F. Докажите, что четырёхугольник $ABFK$ можно вписать в окружность.

Решение. Первый способ.Так как $\angle ABK = \angle ABL - \angle KBL = \angle ABL - 90° = \angle ABL - \angle ABC = \angle CBL$, то прямоугольные треугольники ABK и CBL подобны. Следовательно $AB : BC = BK : BL$, или $AB : BK = BC : BL$, а это значит, что прямоугольные треугольники ABC и KBLтакже подобны. Поэтому$\angle BKF = \angle BAF$и четырехугольник $ABFK$ – вписанный.



Второй способ. Так как $\angle KBL = \angle KDL = 90°$, то четырехугольник $KBLD$ – вписанный. Откуда $\angle BKL = \angle BDL = \angle BDC = \angle BAC$. Последнее равенство следует из равенства треугольников ABC и BCD.

Критерии. Полное обоснованное доказательство – 7 баллов;доказано равенство углов BKF и BAF – 6 баллов; доказано подобие первой пары треугольников ABK и CBL или, что четырехугольник $KBLD$ – вписанный – 3 балла.